Prova scritta - 22 gennaio 2024

Esercizio 1. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo tale che

$$\mathrm{Ker}T = \{(x, y, z)/x + y = 0, z = 0\}, \quad T(1, -1, 2) = (2, 2, 4),\ T(1, 1, 1) = (5, 5, 4).$$

(a) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base standard

(b) Determinare una base di autovettori per T

(c) Determinare, se esiste, una matrice ortogonale O diagonalizzante A.

Risoluzione:

(a) $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Span}\{(1, -1, 0)\}$

Dal punto precedente $T(e_1) = T(e_2)$, inoltre $T(e_1 - e_2 + 2e_3) = T(e_1 - e_2) + 2T(e_3) = (2, 2, 4)$, quindi $T(e_3) = (1, 1, 2)$.

$T(e_1 + e_2 + e_3) = T(2e_1) + T(e_3) = (5, 5, 4)$ e quindi

$T(e_1) = T(e_2) = 1/2[(5, 5, 4) - (1, 1, 2)] = (2, 2, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) il polinomio caratteristico è $t(t^2 - 6t + 6)$ radici sono

$\lambda - 1 = 0$, $\lambda_2 = 3 + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 3 - \sqrt{3}$ Matrice simmetrica, autovettori sono una base e sono ortogonali tra di loro Si possono calcolare con i sistemi oppure , usando l' ortogonalitá

$$v_1 = (1, -1, 0),\ v_2 = (1, 1, -1 + \sqrt{3}),\ (1, 1, 1 + \sqrt{3})$$

(c) La matrice ortogonale

$$O = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/(\sqrt{6 - 2\sqrt{3}} & 1/(\sqrt{6 + 2\sqrt{3}} \\ -1/\sqrt{2} & 1/(\sqrt{6 - 2\sqrt{3}} & 1/(\sqrt{6 + 2\sqrt{3}} \\ 0 & -1 + \sqrt{3}/(\sqrt{6 - 2\sqrt{3}} & 1 + \sqrt{3}/(\sqrt{6 + 2\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale complesso dei polinomi in t di grado al più 3. Considerare i seguenti sottoinsiemi di V

$$\begin{aligned} &W := \mathrm{Span}\{t^2 - 1, t^3 - t\} \\ &U := \{p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in V \mid a_0 = 2a_1 - a_2,\ a_3 = ia_2\} \end{aligned}$$

(a) Verificare che U, W siano sottospazi vettoriali di V.

(b) Dimostrare che $V = U \oplus W$.

(c) Sia $q = -t^3 - t^2 + 3 \in V$. Determinare $u \in U$ e $w \in W$ tali che $u + w = q$.

Risoluzione:

(a) U è un sottospazio , perché è definito da equazioni omogeneee lineari

W è un sottospazio per definizione

(b)

$$u_1 = -1 + t^2 + it^3, u_2 = 2 + t$$

è una base di U. Con Gauss si ha che i 4 vettori sono indipendenti , quind $V = U \oplus W$.

(c)

$$q = -t^3 - t^2 + 3 = -(1 + 2i)(t^2 - 1) + (t^3 - t) + 2iu_1 + u_2.$$

Esercizio 3. Sia $f = L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una base di $\ker(f)$.

(b) Determinare equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Determinare se f sia diagonalizzabile.

Risoluzione:

(a) una base di $\ker(f) = (1, -2, 1)$

(b) equazioni cartesiane $x - 2y + 2z$.

(c) Autovalori sono $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$, quindi f è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e sia b la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ associata alla forma quadratica

$$q(x) = \alpha x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3, \qquad \text{dove } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinare la matrice associata a b.

(b) Al variare di α, determinare il rango e la segnatura di b.

(c) Per quegli α per cui b è degenere, determinare una base ortogonale per b.

Risoluzione:

(a)

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $det(A_\alpha) = \alpha - 5$, inoltre i vettori e_2 e e_3 sono ortogonali e il prodotto è definito positivo su questo sottospazio, quindi l'indice di positivitá è maggiore o uguale a 2 Vediamo i vari casi,

$\alpha > 5$, indice di nullitá è nullo, il determinante è positivo e la segnatura $(3, 0)$

$\alpha = 5$, indice di nullitá è 1 e la segnatura $(2, 0)$

$\alpha < 5$, indice di nullitá è nullo, il determinante è negativo e la segnatura $(2, 1)$

(c) Base ortogonale per b : e_2, e_3, $(1, -1, 2)$. Qui $(1, -1, 2)$ genera $ker A_5$